Dell'astrazione matematica

Concetto ed applicazioni.

Già in una conferenza tenuta al Congresso matematico di Livorno, nel 1901, mentre mi accingevo ad analizzare l'ufficio di quelle sole *Df* (*definizioni*) che i logici dicon *nominali*, avevo accennato al proposito di chiarire le ragioni per cui tralasciavo d'occuparmi delle *Df per astrazione*.

Quanto allora avevo in animo di esporre venne poi svolto in parte da altri autori, quali il Russell e il Couturat; ma, poichè i loro scritti non ebbero forse molta diffusione ed anche perchè in essi la questione non venne forse trattata con la semplicità e la generalità di cui è suscettibile, mi sembra non inutile intrattenerne i cultori delle discipline filosofiche [1]).

* * *

Ognun sa in che consista una *Df nominale*.

A tale *ufficio* può assumersi, ad es. (esempio), la *P* (proposizione):

« *parallelogramma* » significa « quadrilatero in cui ciascun lato è parallelo al suo opposto »;

purchè, rispetto alle *P* anteriori, essa attribuisca ad un *nome nuovo* (notazione *definita*) un *significato noto* (notazione *definente*).

È chiaro che qui si dice *nome* in un senso molto ampio e vago: invece di una *parola*, la notazione *definita* può es-

[1]) Mi riserbo di fare altrove un raffronto, che qui mi parrebbe inopportuno, fra gli scritti accennati e la presente comunicazione.

Digitized by Google

sere una *frase* (*nuova* nel suo complesso, ancorchè si componga di voci in tutto o in parte già adoperate e che possono perciò trovarsi anche nella notazione *definente*). Ad es., è una possibile *Df nominale* la *P*:

« *Punto interno ad una circonferenza* » significa « punto appartenente al piano di una circonferenza ed avente dal centro di essa distanza minore del raggio ».

Pertanto l'*ufficio* di ciascuna *Df nominale* — ch'io preferisco chiamare *esplicita* — è quello di avvertire, in una determinata teoria e in un determinato luogo di essa, che — invece di una notazione a significato *noto*, prolissa e perciò incomoda — nel seguito se ne userà una più breve, *priva* sino allora di significato.

Cosicchè, la *forma* necessaria di ciascuna *Df esplicita* è l'*eguaglianza* delle due notazioni, *definita* e *definente*, la quale è espressa simbolicamente dal segno « = » e nel linguaggio comune dalla parola « *significa* ».

Però non sempre accade, come negli es. dati, che la notazione *definente* (e quindi, poi, la notazione *definita*) abbia significato *costante*. Potrebb'essere invece una *funzione*, ad una o a parecchie *variabili*, l'arbitrarietà delle quali giovi restringere mediante un'*ipotesi*, che in tal caso precederà la detta *eguaglianza* formando con essa la *Df completa*. Ad es., è una possibile *Df esplicita* la *P*:

« *a* e *b* essendo numeri interi assoluti », « *quoziente* di *a* per *b* » significa « il massimo numero intero che, moltiplicato per *b*, dà un prodotto non maggiore di *a* ».

E in particolare la funzione potrà essere una *condizione*, potrà cioè aver forma di *proposizione*. Ad es., è una possibile *Df esplicita* la *P*:

« *a* e *b* essendo numeri interi assoluti », « *a* è *maggiore* di *b* » significa « si può determinare un numero intero assoluto che, aggiunto a *b*, dia per somma *a* ».

* * *

Passiamo ora ad esaminare quelle *Df* che i matematici dicono *per astrazione*.

Digitized by Google

A tale *ufficio* potrebbe assumersi, ad es., la P:

se « a e b sono poligoni », allora

« area di a = area di b » significa « a è equivalente a b »,

purchè sia *noto* qual *classe* designi la parola *poligoni* (che entra nell'*ipotesi* « a e b sono poligoni ») e qual *relazione* designi la frase « *è equivalente a* » (usata nella notazione *definente* « a è equivalente a b ») e purchè anteriormente non sia apparsa la *funzione* espressa da « *area di* » (che due volte si legge nella notazione *definita* « area di a = area di b »).

In generale — se K è una *classe* nota (supposto cioè che di un individuo qualunque x si sappia sempre decidere se appartenga o non appartenga alla classe K) e se R è una *relazione* nota fra i K (supposto cioè che, essendo x ed y due individui arbitrarî di K, si sappia sempre decidere se fra x ed y sussista o non sussista la relazione R) — la *forma* di qualunque *Df per astrazione* è:

1. se « a e b sono (individui appartenenti a) K » allora « $Fa = Fb$ » significa « $a\,R\,b$ »;

dove la scrittura « aRb » indica il *sussistere* della relazione R fra a e b e dove F è la *funzione* che s'intende *definire* per *ciascun* individuo di K[1]).

È chiaro che F dipende tanto da K quanto da R.

Ad es. (conservando la *classe* o la *relazione* dell'es. precedente), sono possibili *Df per astrazione*:

se a e b sono poligoni, allora

« forma di a = forma di b » significa « a è simile a b »;

se a e b sono solidi, allora

« volume di a = volume di b » significa « a è equivalente a b ».

---

[1]) Si ritorna all'es. dato se, al posto di K, R, F, si pone ordinatamente « poligoni », « è equivalente a », « area di ».

Digitized by Google

***

Poichè la notazione *definita* è « *Fa* = *Fb* », la 1 non indica *esplicitamente* il significato nè di *F* nè di « *Fa* ». In altri termini, essa *autorizza* ad usar poi la funzione *F* nella *sola* scrittura « *Fa* = *Fb* », perchè (usando il procedimento inverso) *solo* a questa essa insegna a sostituire una scrittura di significato noto (« *aRb* »).

Riserbandoci di esaminare se la 1 sia almeno una *Df implicita* di *F* o non ne sia piuttosto una *pseudo Df*, consideriamola intanto quale *Df esplicita* di « *Fa* = *Fb* » e domandiamoci se, come tale, essa sia *arbitraria*.

La questione è insolita perchè, dai tempi più remoti sino ai nostri, i logici si son trovati d'accordo nel ritenere che le *Df esplicite* siano *arbitrarie* e perciò *irreprensibili*.

Si è ritenuto cioè, e generalmente si ritiene, che — se può esser discussa l'*opportunità* di una *Df esplicita*, dal punto di vista *etimologico* o *tradizionale*, e se può esserne discussa la *convenienza* dal punto di vista *espositivo* [1]) — non se ne possa contestare la *legittimità*: ogni *Df esplicita* sembrando un atto volontario dell'autore che non vincoli tuttavia la volontà del lettore, questi rimanendo libero di prescinderne, purchè, in ciascuna delle *P* seguenti in cui sia fatto uso della notazione ivi *definita*, sostituisca la notazione *definente*, il cui significato era *noto* prima di quella *Df*.

***

Sia α una *Df esplicita*.

Non v'ha dubbio che, la sua notazione *definita* essendo *nuova* rispetto alle *P* anteriori ad α, da queste non si potrebbe dedurre alcuna *P* in cui sia adoperata quella nota-

---

[1]) La quale *convenienza* sarà tanto più facilmente riconosciuta quanto più *breve* sia la notazione *definita*, rispetto alla notazione *definente*, e quanto più sian *numerose* le occasioni di giovarsene.

Digitized by Google

zione e perciò, in particolare, non si potrebbe dedurne α; cosicchè, α non può essere *dimostrata*.

Ora, non parrebbe potersi affermare, per l'istessa ragione ed altrettanto legittimamente, che dalle P anteriori ad α sarebbe impossibile dedurre la *negazione* di α e che perciò α non può essere *contraddetta*?

Eppure così non è — sebbene siano rispettate le leggi formali esposte dal Peano e adottate da' suoi collaboratori — quando la notazione *definita* sia una *condizione* il cui simbolo *principale* abbia un significato *noto*.

L'argomento si presterebbe ad ampia trattazione, ma non la estenderò più di quanto richieda il tema che mi sono proposto.

***

Sia K una *classe* nota e sia R una *relazione* nota fra i K; x, y, z siano individui arbitrari di K.

Sempre riferendosi a K, si suol dire che R è
riflessiva, quando « $x\,R\,x$ »
simmetrica, quando « se $x\,R\,y$, anche $y\,R\,x$ »
transitiva, quando « se $x\,R\,y$ ed $y\,R\,z$ », anche $x\,R\,z$ ».

L'*eguaglianza* (logica) è una *relazione* che è ad un tempo *riflessiva* ($x = x$),
simmetrica (se $x = y$, anche $y = x$)
e *transitiva* (se $x = y$ ed $y = z$, anche $x = z$),
senza riferimento ad alcuna *classe* particolare, cioè *universalmente*.

Vi sono altre *relazioni* che son pure ad un tempo *riflessive*, *simmetriche* e *transitive*, ma relativamente ad una *classe* particolare K; e queste noi diremo *egualiformi* in K.

Ora è agevole dimostrare il seguente

Teorema I. Dalla P

1. se a e b sono K, « $Fa = Fb$ » significa « aRb »

si deduce la P

(2) R è *egualiforme* in K.

Dim. Siano x, y, z individui arbitrari di K.

Digitized by Google

L'*eguaglianza* essendo *riflessiva*, « $Fx = Fx$ »; cioè [1] « xRx »;
se « xRy », cioè [1] se « $Fx = Fy$ », allora, l'*eguaglianza* essendo *simmetrica*, « $Fy = Fx$ »; cioè [1] « yRx »;
se « xRy ed yRz », cioè [1] se « $Fx = Fy$ ed $Fy = Fz$ », allora, l'*eguaglianza* essendo *transitiva*, « $Fx = Fz$ »; cioè [1] « xRz ».

Riassumendo: R è *riflessiva, simmetrica* e *transitiva* in K, cioè R è *egualiforme* in K.

***

Ciò basta a chiarire che una P del tipo 1 non può assumersi *arbitrariamente* quale Df; affinchè ciò sia *lecito* è *necessario* che *anteriormente* sia stata enunciata la (2) od almeno P dalle quali la (2) possa venir dedotta.

Invero, per il teorema dimostrato:
se dalla P precedenti risultasse la *negazione* della (2) [1]), la 1 sarebbe fonte di *contraddizione*;
se le P precedenti non consentissero nè di *affermare* nè di *negare* la (2), la 1 avrebbe in pari tempo ufficio di Df e di *postulato*.

***

Risposto negativamente alla domanda che ci eravamo rivolta circa l'*arbitrarietà* di una Df del tipo 1, sia pur quale Df *esplicita* di « $Fa = Fb$ », e supposto d'or innanzi che R sia *egualiforme* in K, — un'altra osservazione dobbiam fare in quanto si voglia assumere la 1 quale Df *implicita* di F.

L'accennato divieto di usare del simbolo F altrimenti che in scritture del tipo « $Fa = Fb$ » non proviene soltanto

---

[1]) Il che è ben possibile.

Ad es: fra *rette* o fra *piani* o fra *retta e piano*, la relazione « *è perpendicolare a* » è soltanto *simmetrica*;

fra *numeri* o *segmenti* od *angoli* ecc., la relazione « *è maggiore di* » è soltanto *transitiva*.

Digitized by Google

da uno scrupolo formale, ma è giustificato dal fatto che una P del tipo 1 *non individua* il *significato* di F.

Alcuni esempi varranno a dimostrarlo.

* * *

Riesaminiamo anzitutto l'es. già dato:

1) se a e b sono poligoni, allora

« area di a = area di b » significa « a è equivalente a b ».

Poichè la relazione « *è equivalente a* » è *egualiforme* per la classe dei « *poligoni* » [1]), non contestiamo che la 1) possa *legittimamente* assumersi quale *Df esplicita* di

« area di a = area di b »;

ma *neghiamo* che la 1) *individui* il *significato* di

« area di a ».

A priori si potrebbe osservare: se il trattista riuscisse a formare un'opportuna notazione *definente*, a significato *noto*, non v'ha dubbio che alla 1) preferirebbe la *Df esplicita*:

1') se a è un poligono, allora « area di a » significa « .... »;

se vi rinuncia, gli è che non vi riesce.

Ed ancora: poichè la scrittura

« area di a = area di b »

non è più breve di

« a è equivalente a b »,

quale *convenienza* avrebbe egli ad assumere la 1) come *Df*, se non avesse il proposito di valersene poi *illegittimamente*, usando la frase isolata « area di a »?

Se così non fosse, egli potrebbe rinunciare indifferentemente alla parola « *area* », abbandonando la 1), o alla parola « *equivalente* », ricorrendo sin da principio alla parola « area » [2]).

---

[1]) Ciò si deduce agevolmente dalla *Df esplicita*:

se a e b sono poligoni, allora « a è equivalente a b » significa « a e b si possono decomporre in poligoni rispettivamente sovrapponibili ».

[2]) Basterebbe che, rinunciando alla 1) ed alla *Df* enunciata nella nota precedente, assumesse quale *Df* la *P*:

se a e b sono poligoni, allora « area di a = area di b » significa « a e b si possono decomporre in parti rispettivamente sovrapponibili ».

Digitized by Google

Invece egli non rinuncia alla parola « area », ma vi ricorre il più tardi possibile per preservare la massima parte della teoria da una critica di cui intuisce la legittimità.

***

Ma sospendiamo la critica alle *intenzioni* del trattatista, per occuparci soltanto del valore intrinseco della 1) quale *Df.*

Supposto dunque, com'è doveroso supporre, che, prima della 1), il lettore ignori il significato della frase « *area di* » — chi dopo la 1) le avesse attribuito *un significato preciso*, dovrebbe convenire che si potrebbe attribuirle *invece* il significato espresso da una qualunque delle frasi « *doppio dell'area di* », « *triplo dell'area di* »,.... « *metà dell'area di* »,.... in ciascuna delle quali suppongo che « *area di* » abbia *il* significato attribuitole *dapprima.* Con ciò, la frase « *area di* » si rivela suscettibile di *innumerevoli significati diversi* ciascuno dei quali è compatibile con la 1).

Si obbietterà che la 1) appunto si dice *Df per astrazione* di « *area di* » in quanto *il significato* da attribuire a tal frase è *l'insieme dei significati* compatibili con la 1).

Ma allora, prima che la 1) ci apprenda *il* significato di « *area di* », bisogna aver trovato *tutti* i suoi significati compatibili con la 1); e come si accerta il lettore di averli considerati *tutti*?

Come, ad es., un lettore ignaro di stereometria potrebbe includere fra i significati di « area di *a* » questo, che pur verifica la 1): « volume del prisma avente per base *a* e per altezza un segmento di lunghezza costante »? [1]).

---

[1]) Nè vale replicare che nemmeno i *postulati* di una teoria *individuano* il significato dei simboli *primitivi* (non definiti), perchè — prescindendo dal fatto che il lettore è lasciato *libero* di attribuire ai simboli primitivi *uno* qualunque dei sistemi di significati compatibili coi postulati e che *dopo ciò* il significato di ciascuna notazione *definita esplicitamente* risulta *individuato*, — il tentar di giustificare l'*indeterminatezza* della frase « *area di* » con quella dei simboli primitivi equivale a riconoscere che la 1), sua presunta *Df, non è una Df.*

Digitized by Google

***

Ecco altri es. di possibili *Dif per astrazione*:

2) se a e b sono *rette*, allora

« *direzione* di a = *direzione* di b »

significa « a è *parallela* a b ovvero *coincide* con b »;

3) se α e β sono piani, allora

« *giacitura* di α = *giacitura* di β »

significa « α è *parallelo* a β ovvero *coincide* con β »[1]).

Si osservi che, se le rette a e b sono rispettivamente *perpendicolari* ai piani α e β, le due condizioni

« a è *parallelo* a b ovvero *coincide* con b »

« α è *parallelo* a β ovvero *coincide* con β »

sono equivalenti, cioè da ciascuna si deduce l'altra.

Ne segue, per le 2) 3), che è indifferente dire

« *direzione* di a = *direzione* di b »

ovvero

« *giacitura perpend.* ad a = *giacitura perpend.* a b »;

e che è pure indifferente dire

« *giacitura* di α = *giacitura* di β »

ovvero

« *direzione perpend.* ad α = *direzione perpend.* a β ».

Dal che risulta che, scelto per ciascuna delle frasi

« *direzione di* » e « *giacitura di* a »

un significato compatibile con le 2) 3) e ricavatone il significato delle frasi (espressamente ordinate così)

« *giacitura di un piano perpendicolare a* »

« *direzione di una retta perpendicolare a* »,

il significato di queste può venire assunto, rispettivamente, quale *nuova* interpretazione delle frasi

« *direzione di* » e « *giacitura di* ».

---

[1]) È noto che due *rette* si dicono *parallele* quando stanno in uno stesso piano e non hanno alcun punto comune, e che due piani si dicono *paralleli* quando non hanno alcun punto comune.

Pertanto, la relazione « *è parallelo a* » è *simmetrica* (sia fra *rette* che fra *piani*), ma non è *riflessiva* nè *transitiva*. Invece la relazione

« *è parallelo a* ovvero *coincide con* »

è *equaliforme* in ambo i casi.

Digitized by Google

Ci sembra inutile addurre altri es. per giustificare il nostro asserto che la 1, quale *Df* implicita di « *Fa* », è *ambigua* [1]).

* * *

Ed ora, dalla parte critica passando alla parte espositiva, vediamo in qual modo si possano evitare gli inconvenienti additati.

Stabiliamo anzitutto la seguente *Df esplicita*:

Definizione. Se K è una *classe* in cui R è una *relazione egualiforme* e se a è un individuo arbitrario di K, allora

« **astrazione** di a rispetto ad R »

significa « l'insieme di tutti e soli quei K che stanno nella relazione R con a ».

Ad es: se a è un *poligono*, allora

« *astrazione* di a rispetto alla relazione *è equivalente a* »

è « l'insieme di tutti e soli i poligoni x tali che

x è equivalente ad a ».

Poi dimostriamo il seguente

Teorema II. Se K è una *classe* in cui R è una *relazione egualiforme* e se a e b sono K, allora (per brevità, indicando ordinatamente con Fa ed Fb le *astrazioni* di a e di b rispetto ad R):

$$« Fa = Fb »$$

quando e sol quando « xRy ».

Dim. Poichè R è *riflessiva* in K ed a è un K,

$$aRa$$

cioè [2])

$$a \text{ è un (individuo della classe) } Fa. \qquad (1)$$

---

[1]) In generale, se f è *un* significato di F compatibile con la |, ogni *altro* significato di F compatibile con la | è *funzione biunivoca* di f, per ogni valore assunto da fx al variare di x in K.

[2]) In questa *Dim* si ricorre soltanto, e ripetute volte, all'*ipotesi* del teorema stesso e alla *Definizione*; perciò trascuriamo di citar continuamente l'una e l'altra.

Digitized by Google

Se $Fa = Fb$ (se cioè alle classi Fa ed Fb appartengono gli *stessi* individui), allora, per la (1), a è un Fb e quindi aRb; dunque:

se $Fa = Fb$, allora aRb. (2)

Viceversa: se aRb e se x è un (individuo arbitrario della classe) Fa, se cioè x è un K tale che xRa, allora da « xRa ed aRb » — poichè R è *transitiva* in K ed x, a, b sono K — si deduce xRb, cioè x è un Fb; dunque:

se aRb, allora ogni Fa è un Fb. (3)

Analogamente:

se bRa, allora ogni Fb è un Fa. (4)

Ma — poichè R è *simmetrica* in K ed a, b sono K —

se aRb, allora bRa;

da ciò e dalle (3) (4) risulta:

se aRb, allora ogni Fa è un Fb ed ogni Fb è un Fa;

brevemente:

se aRb, allora $Fa = Fb$. (5)

Riassumendo (2) e (5) si conclude appunto che

« $Fa = Fb$ » quando e sol quando « aRb ».

* * *

Or dunque — se fra *i varî significati* di « Fa » compatibili con la 1 si sceglie una volta per tutte *quello* indicato nell'ipotesi del Teorema II e che è perfettamente *individuato* dalla *Definizione* — risulta che la consueta *Df per astrazione*, cioè del tipo 1, è un *teorema* della *teoria dell'astrazione* (la qual teoria non d'altro si compone fuorchè appunto della *Definizione* e del *Teorema* II).

Poichè la dimostrazione del teorema è puramente *formale* (non richiede cioè di *conoscere* nè a nè b nè K nè R), nelle applicazioni, data la *Df esplicita* di una particolare *astrazione*, si potrà legittimamente farla subito seguire dall'antica *Df per astrazione* con questo mutamento: che invece di una *Df* essa è un *corollario* della *nuova Df.*

Eccone alcuni es:

α) *Df.* Se a è un *poligono*, chiameremo

« *area* di a »

l'*astrazione* di a rispetto alla relazione « *è equivalente a* ».

Digitized by Google

Cor. Se *a* e *b* sono *poligoni*,

« area di a = area di b »

equivale a dire

« *a* è equivalente a *b* » [1]).

β) *Df.* Se *a* è una *retta*, chiameremo

« *direzione* di *a* »

l'*astrazione* di *a* rispetto alla relazione « *é parallelo a* ovvero *coincide con* ».

Cor. Se *a* e *b* sono *rette*,

« *direzione* di a = *direzione* di b »

equivale a dire

« *a* è parallelo a *b* ovvero coincide con *b* ».

Analogamente per la *giacitura* di un piano, ecc.

* * *

Una riprova della *legittimità* della nostra *Definizione* sta nel fatto ch'*essa non è necessaria*: il *Teorema* II continua a sussistere (purchè, come si è avvertito, alla notazione *definita* si sostituisca la notazione *definente*).

E si badi che *didatticamente* può esser preferibile rinunciare alla parola *astrazione*.

L'es. α) diviene allora:

α') *Df.* Se *a* è un *poligono*, chiameremo

« *area* di *a* »

l'insieme di tutti e soli quei *poligoni* che sono *equivalenti* ad *a*; e il *Cor.* rimane invariato.

Così, per dare un altro es. notevole, la teoria dei *numeri interi assoluti* può fondarsi così sui concetti di *classe* e di *corrispondenza biunivoca*:

γ) *Df.* Se *a* è una *classe*, chiameremo

« *numero* degli *a* »

l'insieme di tutte e sole le *classi* che sono in *corrispondenza biunivoca* con *a*.

---

[1]) Si confrontino ordinatamente questa *Df* e il suo *Cor* con le *P* 1') e 1).

Digitized by Google

Cor. Se a e b sono *classi*,

« numero degli a = numero dei b »

equivale a dire « a è in corrispondenza biunivoca con b »[1])

* * *

Si potrà obbiettare, ed io non lo contesto, che il buon senso e l'esperienza guidano volta a volta il trattatista a giovarsi delle consuete *Df per astrazione* sol quando si tratti di *relazioni egualiformi* nella *classe* considerata, evitando così ogni pericolo di *contraddizioni.*

Ma può esser stato utile notare che, se il teorema I chiarisce la *necessità* di tale *condizione*, il teorema II ne precisa la *sufficienza.*

Ed ancorchè il soccorso, reale o presunto, dell'intuizione inducesse volta a volta il trattatista a ritener perfettamente *individuate* le idee *ambiguamente* definite *per astrazione* (nel modo consueto) — non sarà stato inutile rilevare che l'ambiguità — era insita a quel *tipo* di *Df* [1] e additare un procedimento generale che — affrancando dal malfido ausilio dell'*intuizione* — trasporti, dai campi psicologico e gnoseologico al campo *logico*, la *individuazione esplicita* delle *astrazioni matematiche.*

E mi pare valga la pena di evitare gli inconvenienti additati, poichè il procedimento proposto insegna a farlo

---

[1]) Cioè: « appaiando ciascun a con un b diverso, seguente gli a e i b si esauriscono insieme »; volgarmente, « gli a sono tanti quanti sono i b ».

Per passare al concetto di *numero*, occorre stabilir prima quello di *classe finita*, il che può farsi così:

Df. Dire che

« a è una *classe finita* »

significa « a è una *classe*; e, se x è una classe *contenuta* in a (a esclusa) non si può stabilire alcuna *corrispondenza biunivoca* fra x ed a.

Df.

« *numero intero assoluto* »

significa « *numero di* una classe finita »;

cioè: dire

« α è un numero intero assoluto »

significa: si può determinare una classe finita a tale che α sia il « *numero* degli a ».

Digitized by Google

molto agevolmente, senza alterare la compagine delle teorie che ora si iniziano con una *Df per astrazione* del tipo 1.

In ogni modo, un risultato notevole mi sembra conseguito nel campo della *logica* pura, in quanto *la teoria delle definizioni* risulta semplificata mediante l'abbandono del tipo 1, ritenuto sin qui necessario in alcune applicazioni.

Parma, 26 settembre 1907.

ALESSANDRO PADOA.

Digitized by Google